

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 35

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $55 - 5 \cdot (15 - 16 : 4)$ este egal cu
- 5p 2. Șase creioane de același fel costă 7,50 lei. Un astfel de creion costă ...lei.
- 5p 3. Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $(-1, 6)$ este egal cu
- 5p 4. Lungimea unui cerc este egală cu 30π cm. Raza acestui cerc este egală cu ... cm.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Unghiul dreptelor BC și EG are măsura de ...°.

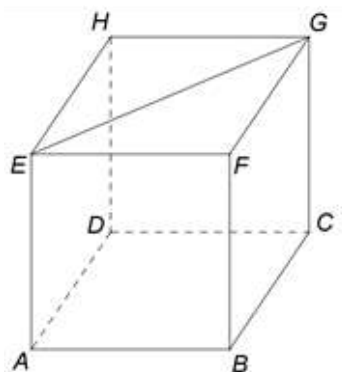
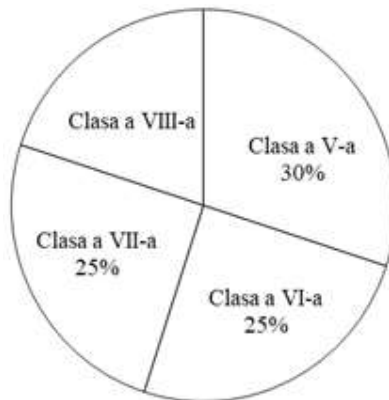


Figura 1

- 5p 6. La un concurs sportiv sunt înscriși 100 de elevi din clasele de gimnaziu ale unei școli. În diagrama de mai jos este prezentată repartitia procentuală, pe clase, a elevilor înscriși la concurs.



Conform informațiilor din diagramă, numărul de elevi din clasele a VII-a și a VIII-a, înscriși la acest concurs este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$.
- 5p 2. Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $(m - 3) \cdot n^2 = 36$.
- 5p 3. Trei copii iau pe rând mere dintr-un coș. Primul copil ia jumătate din mere, plus un măr. Al doilea copil ia jumătate din merele rămase, plus un măr. Al treilea copil ia jumătate din merele rămase, plus un măr și coșul rămâne gol. Calculați câte mere au fost în coș.

4. Se consideră numerele $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{48}-\sqrt{28}}{\sqrt{8}}$ și $y = \left(0, (3) + \frac{2}{3} + \sqrt{2}\right) \cdot (\sqrt{2}-1)$.

5p a) Arătați că $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5p b) Arătați că numărul $N = 2x^2y$ este natural.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (x+1)(2x-3) + 2(x-1)^2 - 4(x+3)(x-1)$, unde x este număr real. Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care $E(m) \geq 24$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB = 16\text{cm}$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor DC și AD , iar punctul E este proiecția punctului D pe dreapta AC .

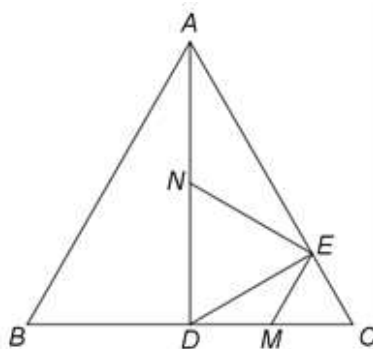


Figura 2

5p a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48cm .

5p b) Demonstrați că dreptele ME și NE sunt perpendiculare.

5p c) Calculați aria patrulaterului $BDNF$, unde F este punctul de intersecție a dreptelor EN și AB .

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 20\text{cm}$, $VA = 20\text{cm}$ și $VO \perp (ABC)$, unde O este punctul de intersecție al dreptelor AC și BD . Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor VO și OC .

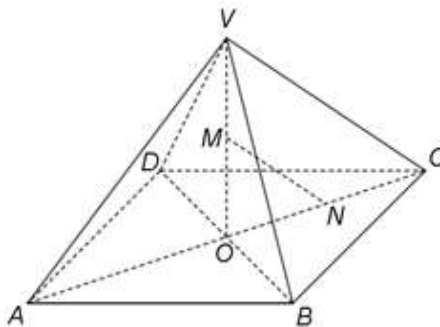


Figura 3

5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu 400cm^2 .

5p b) Determinați măsura unghiului dreptelor MN și VA .

5p c) Demonstrați că distanța de la punctul M la planul (VBC) este egală cu $\frac{5\sqrt{6}}{3}\text{cm}$.

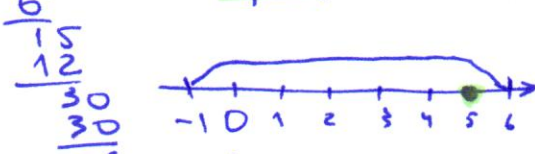
TESTUL 35: REZOLVARE

SUBIECTUL I:

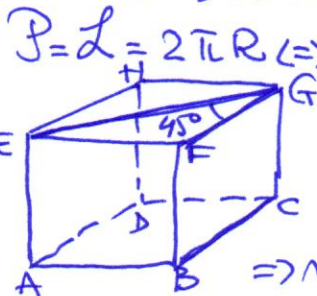
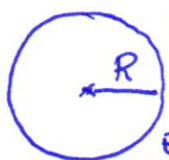
1) $55 - 5 \cdot (15 - 16 : 4) = 55 - 5 \cdot (15 - 4) = 55 - 5 \cdot 11 = 55 - 55 = 0$.

2) 6 creioane... 7,50 lei $\Rightarrow$ 1 creion... $7,50 : 6 = 1,25$ (lei)

3) Cel mai mare nr. natural din intervalul $(-1; 6)$ este **5**.



4) $P = L = 2\pi R (\Rightarrow) 2\pi R = 30\pi (\Rightarrow) R = \frac{30\pi}{2\pi} = 15$ (cm).



BC și EG : necoplanare
 $BC \parallel FG$

5) $\Rightarrow m(\widehat{BC; EG}) = m(\widehat{FG; EG}) = m(\widehat{EGF}) = 45^\circ$.

6) Care este procentul elevilor din clasa a VIII-a?

$$100\% - (30\% + 25\% + 25\%) = 100\% - 80\% = 20\%.$$

Câți elevi din clasa a VII-a participă? (25% din 100) = 25 (elevi)

Câți elevi din clasa a VIII-a participă? (20% din 100) = 20 (elevi)

Câți elevi din clasele a VII-a și a VIII-a s-au înscris? **45 (elevi)**

SUBIECTUL al II-lea:

2) $(m-3) \cdot n^2 = 36$; $m, n \in \mathbb{N}$.

n^2 : pătrat perfect
 $36 : n^2$ $\Rightarrow \{36; 9; 4; 1\}$ sunt valorile pe care le poate lua n^2 .

$$D_{36} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$$

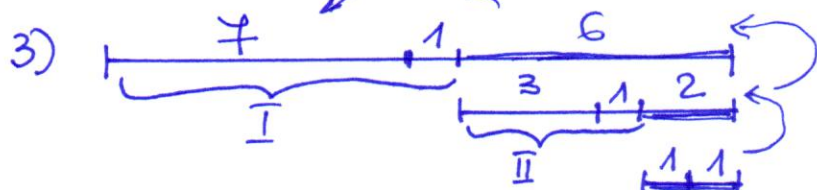
Avem, pe rând: $n^2 = 36 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow m - 3 = 1 \Rightarrow m = 4$;

$$n^2 = 9 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow m - 3 = 4 \Rightarrow m = 7$$
;

$$n^2 = 4 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m - 3 = 9 \Rightarrow m = 12$$
;

$$n^2 = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m - 3 = 36 \Rightarrow m = 39$$
.

R: Perechile (m, n) căutate sunt: $(4; 6); (7; 3); (12; 2)$ și $(39; 1)$.



$\Rightarrow$ În coș au fost 14 mere.

Al III-lea, când jumătate din III
merele rămase plus un măr, iar
coșul rămâne gol $\Rightarrow$ id 2 mere!

$$4) a) x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ deci } x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ g.e.d.}$$

$$b) y = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \sqrt{2} \right) (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) =$$

$$= (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1, \text{ deci } y = 1. \quad \left. \begin{array}{l} 0, (3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1. \end{array} \right\}$$

$$N = 2x^2y = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 3, 3 \in \mathbb{N}, \text{ deci}$$

$$N = 3 \in \mathbb{N}, \text{ g.e.d.}$$

$$5) E(x) = (x+1)(2x-3) + 2(x-1)^2 - 4(x+3)(x-1), x \in \mathbb{R}$$

$$E(x) = 2x^2 - x - 3 + 2x^2 - 4x + 2 -$$

$$- 4x^2 - 8x + 12 = -13x + 11.$$

$$\text{Deci } E(x) = -13x + 11 \text{ pt. orice } x \in \mathbb{R}.$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow E(m) = -13m + 11.$$

$$E(m) \geq 24 (\Leftrightarrow) -13m + 11 \geq 24 (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) -13m \geq 24 - 11 (\Leftrightarrow) -13m \geq 13 \quad \left| \cdot (-1) \right. (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) 13m \leq -13 (\Leftrightarrow) m \leq -\frac{13}{13} (\Leftrightarrow) m \leq -1.$$

$S = \{ \dots; -4; -3; -2; -1 \} \Rightarrow$ cel mai mare nr. ntreg m pentru care $E(m) \geq 24$ este -1 .

SUBIECTUL al III-lea:

1) a) $\triangle ABC$: echilateral $\Rightarrow AB = AC = BC$.

$$P_{\triangle ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 16 = 48 (\text{cm}), \text{ g.e.d. b}$$

b) $\triangle HDM \cong \triangle NEM$ (L.L.L.) $\Rightarrow \widehat{HDM} \cong \widehat{NEM}$

$$m(\widehat{HDM}) = 90^\circ$$

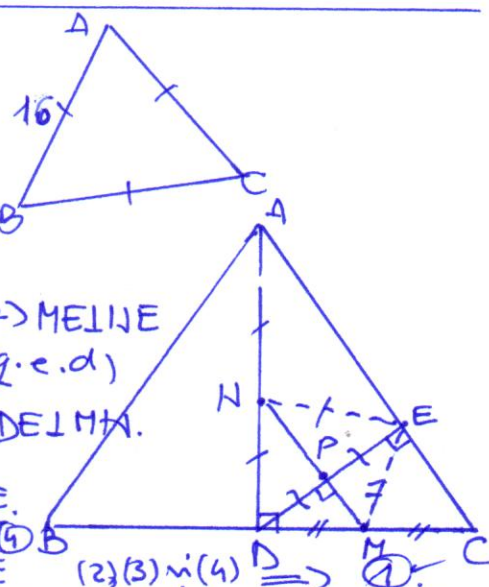
Demonstrăm că ① e adevărată: $\{NM\}$ at. comună $\Rightarrow ME \perp NE$ (g.e.d)

$[NM]$: linie mijlocie în $\triangle DAC \Rightarrow NM \parallel AC$, iar $DE \perp AC \Rightarrow DE \perp NM$.

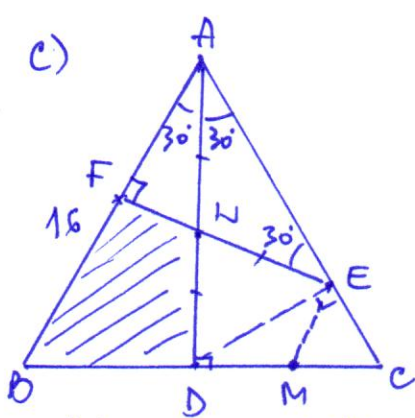
Atunci $DP = PE$ (am notat $\{P\} = MN \cap DE$). ③

$\triangle NDE$: isoscel (HP : înălțime și mediană) $\Rightarrow ND = NE$.

$\triangle MDE$: isoscel (MP : — " —) $\Rightarrow MD = ME$ ④



c)



$$A_{BDNF} = A_{\triangle ABD} - A_{\triangle AFH}$$

$$A_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 16 \sqrt{3}}{8} = 32\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Am arătat la (b) că $\triangle NDE$: isoscel cu $ND = NE$.

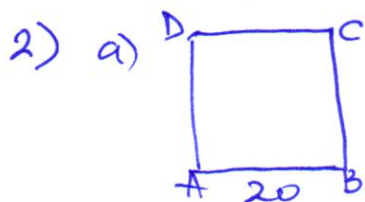
Atunci $\triangle HAE$: isoscel, $HA = HD = HE$; $m(\widehat{HAE}) = 30^\circ \Rightarrow \Rightarrow m(\widehat{HEA}) = 30^\circ$; $m(\widehat{FAE}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{AFE}) = 90^\circ$.

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (cm)}; AN = \frac{1}{2} AD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$FH = \frac{1}{2} AN = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$A_{\triangle AHF} = \frac{a b \sin c}{2} = \frac{AN \cdot FH \sin \widehat{H}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{24 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Aveam: } A_{BDNF} = A_{\triangle ABD} - A_{\triangle AHF} = 32\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 26\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{), g.e.d.}$$



$$A_{\square} = a^2; A_{ABCD} = AB^2 = 20^2 = 20 \cdot 20 = 400 \text{ (cm}^2\text{), g.e.d.}$$

b)

$$AC = a\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ cm}; OC = \frac{1}{2} AC = 10\sqrt{2} \text{ cm};$$

$$ON = NC = \frac{1}{2} OC = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$VA = VC = 20 \text{ cm}; \Rightarrow AC^2 = VA^2 + VC^2 \Leftrightarrow$$

$$AC = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow (20\sqrt{2})^2 = 20^2 + 20^2 \Leftrightarrow 800 = 400 + 400 \text{ (A)}$$

deci $\triangle AVC$: dr. (isoscel), conf. R.T. Pitagora.

$\Downarrow$

$$VC \perp VA \text{ (1)}$$

Dar $[MN]$: linie mijlocie în $\triangle VOC \Rightarrow$

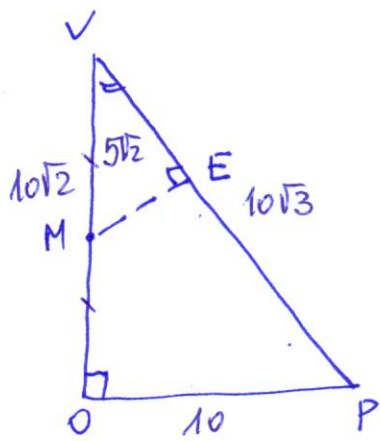
$$\Rightarrow MN \parallel VC \text{ (2)}$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \perp VA$, deci $m(\widehat{MNV}) = 90^\circ$.

c) Fie P mijlocul lui $[BC]$. Aveam $MO \perp (ABC)$, $OP \perp BC \xrightarrow{(T3.L.)} MP \perp BC$. } $\Rightarrow R2T3 \perp$

Ducem $ME \perp VP$ și avem $VP \perp BC$ (apoteză)

$\Rightarrow ME \perp (VBC)$, deci $d(M; (VBC)) = ME$.



$\Delta VOP \sim \Delta VEM$ (u.u.) (dreptunghiice în $\widehat{V}$ comun)

$$\Downarrow$$

$$\frac{ME}{OP} = \frac{VM}{VP}$$

ΔVBC : echilateral $\Rightarrow VP = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = \boxed{10\sqrt{3}(\text{cm})}$

ΔVAC : dr. isoscel $\Rightarrow VO = \frac{AC}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}(\text{cm})$

$VM = \frac{VO}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}(\text{cm})$. $OP = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10(\text{cm})$

$$\frac{ME}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} \Rightarrow ME = \frac{10 \cdot 5\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{2}}{30} = \frac{5\sqrt{6}}{3}(\text{cm}).$$

Deci $d(M; (VBC)) = ME = \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 35

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	0	5p
2.	1,25	5p
3.	5	5p
4.	15	5p
5.	45	5p
6.	45	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează trapezul isoscel Notează trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$	4p 1p
2.	$(m-3) \cdot n^2 = 36$ și, cum m, n sunt numere naturale, obținem că $n^2 \in \{1, 4, 9, 36\}$, deci $n \in \{1, 2, 3, 6\}$ Perechile (m, n) sunt $(4, 6), (7, 3), (12, 2)$ sau $(39, 1)$	3p 2p
3.	Dacă a este numărul de mere rămase în coș după ce primii doi copii au luat mere, atunci $\frac{a}{2} + 1 = a$, deci $a = 2$ Dacă b este numărul de mere rămase în coș după ce primul copil a luat mere, atunci $b - \left(\frac{b}{2} + 1\right) = 2$, deci $b = 6$ Dacă c este numărul inițial de mere din coș, atunci $c - \left(\frac{c}{2} + 1\right) = 6$, deci $c = 14$	2p 2p 1p
4.	a) $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{14}{4}} - \sqrt{\frac{10}{4}} + \sqrt{\frac{48}{8}} - \sqrt{\frac{28}{8}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{6} - \sqrt{\frac{7}{2}} =$ $= \sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $y = \left(\frac{3}{9} + \frac{2}{3} + \sqrt{2}\right) \cdot (\sqrt{2} - 1) = (1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$ $N = 2x^2y = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, care este număr natural	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 + 2(x^2 - 2x + 1) - 4(x^2 - x + 3x - 3) = 2x^2 - x - 3 + 2x^2 - 4x + 2 - 4x^2 - 8x + 12 =$ $= -13x + 11$, pentru orice număr real x $E(m) \geq 24 \Leftrightarrow -13m + 11 \geq 24 \Leftrightarrow m \leq -1$, deci cel mai mare număr întreg m pentru care $E(m) \geq 24$ este $m = -1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\triangle ABC$ este echilateral, deci $P_{\triangle ABC} = 3AB =$ $= 3 \cdot 16 = 48 \text{ cm}$	3p 2p
	b) $\triangle AED$ este dreptunghic în E și N este mijlocul segmentului $AD \Rightarrow NA = NE = ND$ și $\triangle DEC$ este dreptunghic în E și M este mijlocul segmentului $DC \Rightarrow MD = ME = MC$ $ND = NE$, $MD = ME$ și MN latură comună $\Rightarrow \triangle NDM \equiv \triangle NEM$, deci $\sphericalangle NDM \equiv \sphericalangle NEM$ și, cum $ND \perp MD$, obținem că dreptele ME și NE sunt perpendiculare	2p 3p
	c) $\triangle ANE$ este isoscel și $m(\sphericalangle EAN) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AEN) = 30^\circ$ și, cum $m(\sphericalangle EAF) = 60^\circ$, obținem că $m(\sphericalangle AFE) = 90^\circ \Rightarrow \triangle AFN$ este dreptunghic cu $AN = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ și $m(\sphericalangle NAF) = 30^\circ$, deci $NF = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ și $AF = 6 \text{ cm}$	3p
	$\mathcal{A}_{BDNF} = \mathcal{A}_{ABD} - \mathcal{A}_{AFN} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} - \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 26\sqrt{3} \text{ cm}^2$	2p
2.	a) $ABCD$ este pătrat, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 =$ $= 20^2 = 400 \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) M și N sunt mijloacele segmentelor VO și OC , deci MN este linie mijlocie în $\triangle VOC$, deci $MN \parallel VC$, de unde obținem că $m(\sphericalangle (MN, VA)) = m(\sphericalangle (VC, VA))$ $\triangle VOA \equiv \triangle VOC \Rightarrow VA = VC = 20 \text{ cm}$ și, cum $AC = 20\sqrt{2} \text{ cm}$, obținem că $AC^2 = VA^2 + VC^2$, deci $m(\sphericalangle (VC, VA)) = m(\sphericalangle AVC) = 90^\circ$	3p 2p
	c) $VO \perp (ABC)$, $OP \perp BC$, unde P este mijlocul lui BC și $BC \subset (ABC) \Rightarrow VP \perp BC$ și, cum $OP \cap VP = \{P\}$, obținem $BC \perp (VOP) \Rightarrow BC \perp MQ$, unde $Q \in VP$ astfel încât $MQ \perp VP$ $MQ \perp VP$, $MQ \perp BC$ și $VP \cap BC = \{P\} \Rightarrow MQ \perp (VBC)$, deci $d(M, (VBC)) = MQ$ și, cum	2p
	$VO = 10\sqrt{2} \text{ cm}$, $VP = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ și $\triangle VMQ \sim \triangle VPO \Rightarrow \frac{VM}{VP} = \frac{MQ}{PO}$, obținem $MQ = \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$	3p